



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„LAURENȚIU PANAITOPOL”, EDIȚIA A XV-A

Soluții clasa a VIII-a

Punctaj din oficiu 16p

Problema 1. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm numărul $a_n = 6n^2 + 7n + 2$.

a) Arătați că niciunul dintre numerele a_n , $n \geq 1$ nu este prim.

b) Arătați că niciunul dintre numerele a_n , $n \geq 1$ nu este pătrat perfect.

Soluție a) $a_n = (2n + 1)(3n + 2)$, de unde reiese imediat concluzia 9p

Problema 2. Arătați că, dacă m este un număr real și una dintre soluțiile ecuației $x^2 + mx + m^2 = 3$ este număr întreg nenul, atunci și cealaltă soluție este număr întreg.

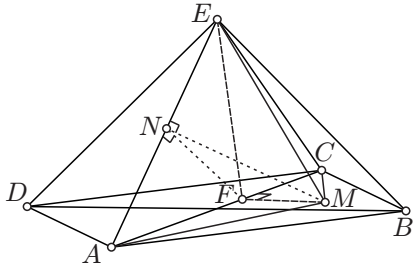
Soluție. Ecuația implică $3x^2 + (x + 2m)^2 = 12$. Rezultă că soluțiile reale verifică relația $3x^2 \leq 12$

Problema 3. Numerele reale x, y, z verifică relațiile: $x, y, z \in [2, 20]$, $x + y + z = 31$ și $xyz = 360$.

Arătați că unul dintre numere este egal cu 2.

Soluție. Vom folosi $(x - 2)(y - 2)(z - 2) \geq 0$ și $(x - 20)(y - 20)(z - 20) \leq 0$ 9p

Problema 4. O piramidă patrulateră regulată are baza $ABCD$ și vârful E . Considerăm un punct variabil M în interiorul pătratului $ABCD$ și proiecțiile sale N, P, Q, R pe muchiile laterale EA, EB, EC , respectiv ED . Determinați poziția lui M pentru care suma $MN + MP + MQ + MR$ este minimă.



Soluție. Avem $MN \cdot AD = 2S_{MAE}$, deci $MN + MP + MQ + MR = \frac{2}{l}(S_{MAE} + S_{MBE} + S_{MCE} + S_{MDE})$, unde l este lungimea muchiei laterale.

Arătăm că valoarea minimă a sumei $S_{MAE} + S_{MCE}$

Barem orientativ

Exprimarea distanțelor în mod convenabil (e.g. ca în soluțiile de mai sus) 9p

Identificarea pozițiilor pentru care suma a două distanțe este minimă 6p

Finalizare 6p

b) Observăm că numerele $2n + 1$ și $3n + 2$ sunt prime între ele: dacă $d \mid 2n + 1$ și $d \mid 3n + 2$, atunci $d \mid 2(3n + 2) - 3(2n + 1) = 1$ 6p

Astfel, dacă a_n ar fi pătrat perfect atunci $3n + 2$ ar fi pătrat perfect – fals, deoarece $3n + 2$ dă rest 2 la împărțirea cu 3, iar pătratele perfecte dau la împărțirea cu 3 resturile 0 sau 1 6p

și, cum x este număr întreg nenul, obținem $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$ 9p

Obținem posibilitățile $m^2 - 2m + 1 = 0$, $m^2 - m - 2 = 0$, $m^2 + m - 2 = 0$ sau $m^2 + 2m + 1 = 0$, de unde $m \in \{1, 2, -2, -1\}$ 6p

În toate cazurile, ambele soluții sunt întregi 6p

Din cele două relații reiese $xy + xz + yz \leq 238 \leq xy + xz + yz$, deci $xy + xz + yz = 238$, (*) 6p

Înlocuind $x = a + 2$, $y = b + 2$, $z = c + 2$ în cele două egalități din ipoteză și în (*) obținem $abc = 0$, de unde reiese concluzia 6p

este S_{ACE} și se obține pentru $M \in AC$, (1). Fie F proiecția lui M pe (EAC) . Deoarece piramida este regulată, avem $(EAC) \perp (ABCD)$, deci $F \in AC$. Apoi $S_{FCE} = S_{MCE} \cdot \cos \alpha \leq S_{MCE}$, unde α este măsura unghiului planelor (MCE) și (ACE) . Analog $S_{FAE} \leq S_{MAE}$. Egalitatea se obține când unghiurile planelor (MCE) și (MAE) cu planul (ACE) sunt nule, ceea ce dovedește (1).

Analog cu (1), valoarea minimă a sumei $S_{MBE} + S_{MDE}$ este S_{BDE} . Pentru a obține simultan cele două minime, trebuie ca M să fie punctul comun al dreptelor AC și BD . Astfel, poziția lui M pentru care suma este minimă e intersecția diagonalelor.

Altă soluție (schită). Definim F ca mai sus. Atunci $FN \perp AE$ și $MN \geq FN$, cu egalitate $\iff M \in AC$. Folosind apoi arii obținem $FN + FQ = \frac{2}{l}S_{EAC}$ și concluzionăm ca mai sus.